**Département STID - IUT Paris Descartes** **2017-2018**
**Probabilités - S2**

## TD 3 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev - Convergence en probabilité

### Rappels :

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** pour une variable aléatoire d'espérance et de variance finies :

$$\forall t > 0,\ P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{t^2}$$

- **Inégalité de Markov** $\forall Z$ variable aléatoire positive , $\forall a > 0$ $\quad P(Z > a) \leqslant \dfrac{E(Z)}{a}$
- **Convergence en probabilité**

  Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. On dit que $U_n$ converge en probabilité vers $\mu \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|U_n - \mu| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- **Loi (faible) des grands nombres**

  Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même espérance (finie) $\mu$ et de même variance (finie) $\sigma^2$, alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$$

**Exercice 1**
Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance et de variance toutes deux égales à 20. Que peut-on dire de $P(0 \leqslant X \leqslant 40)$.

**Exercice 2**
Soient $X_i,\ i = 1, 2 \cdots \ldots, 100$ des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0; 1]$. Évaluer approximativement $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 6\right)$.

**Exercice 3**
On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

**1)** Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces ?

**2)** On sait, de plus, que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine soit comprise entre 40 et 60 ?

**Exercice 4**
On effectue $n$ lancers successifs supposés indépendants d'une pièce parfaitement équilibrée.

**1)** Soit $S_n$ le nombre de piles obtenues au cours des $n$ lancers. Quelle est la loi de $S_n$ ? Calculer son espérance $\mathrm{E}(S_n)$ et sa variance $\mathrm{Var}(S_n)$.

**2)** Soit $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ la proportion de piles obtenues au cours des $n$ lancers. Calculer $\mathrm{E}(F_n)$ et $\mathrm{Var}(F_n)$.

**3)** Pour quels nombres $n$ de lancers peut-on affirmer, avec un risque de se tromper inférieur à 5 %, que la proportion de piles au cours de ces $n$ lancers diffère de $\dfrac{1}{2}$ d'au plus un centième.

## TD 3 suite - Loi des grands nombres - Théorème Central Limite

### Rappels de cours

**Théorème Central Limite** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid de même espérance $\mu$ et de même variance $\sigma^2$. On a alors :

$$\sqrt{n}\ \frac{(\overline{X}_n-\mu)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

**Interprétation du TCL** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid de même espérance $\mu$ et de même variance $\sigma^2$.
Quand $n$ est "grand", $\sqrt{n}\ \frac{(\overline{X}_n-\mu)}{\sigma}$ suit approximativement (ou peut être approximée par) une loi normale centrée réduite :

$$\sqrt{n}\ \frac{(\overline{X}_n-\mu)}{\sigma} \simeq \mathcal{N}(0,1)$$

Ou aussi, quand $n$ est "grand", $\overline{X}_n$ suit approximativement (ou peut être approximée par) une loi normale d'éspérance $\mu$ et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$ :

$$\overline{X}_n \simeq \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

**Corollaire (Moivre-Laplace)** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi de Bernoulli de paramètre $p\in[0;1]$. On a :

$$\sqrt{n}\ \frac{(\overline{X}_n-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

**Interprétation du corollaire de Moivre-Laplace pour la loi de Bernoulli** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi de Bernoulli de paramètre $p\in[0;1]$.
Quand $n$ est "grand", $\overline{X}_n$ suit approximativement (ou peut être approximée par) une loi normale d'éspérance $p$ et de variance $\frac{p(1-p)}{n}$ :

$$\overline{X}_n \simeq \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

**Interprétation du corollaire de Moivre-Laplace pour la loi binômiale** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi de Bernoulli de paramètre $p\in[0;1]$.

On remarque que $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\ \overline{X}_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. On en déduit :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \simeq \mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right)$$

**Exercice 5**

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, déterminer au moyen de l'approximation la plus adéquate :

**a)** $P(X \leq 4)$ si $n = 50\,,\, p = 0,2$ **b)** $P(X \leq 70)$ si $n = 200\,,\, p = 0,5$

**Exercice 6**

Une compagnie aérienne utilise un avion qui peut transporter au maximum 400 passagers. La probabilité pour qu'un passager, ayant réservé pour un vol donné, ne se présente pas à l'embarquement est de 0,08.

**1)** La compagnie accepte pour un vol 420 réservations. On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

a- Quelle est la loi suivie par X ?

b- Calculer la probabilité de l'événement $(X \leq 400)$. La compagnie prend un risque en prenant 420 réservations ; vous paraît-il important ?

**2)** La compagnie accepte pour un vol donné $n$ réservations (avec $n \geq 400$). Déterminer la valeur maximale de $n$ pour que la probabilité de l'événement $(X \leq 400)$ soit supérieure ou égale à 0,95.

**Exercice 7**

**Loi du min et du max**

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, définies sur un même espace $\Omega$ et à valeurs réelles. On note $F$ la fonction de répartition de $X_1$.

**1)** On lance un dé 2 fois, donc $n = 2$. Soient $X_1$ et $X_2$ les résutats respectifs de ces 2 lancers. Soit $M_2 = \max\{X_1, X_2\}$ la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la plus grande valeur parmi $X_1(\omega), X_2(\omega)$.

**(a)** Écrire $\Omega$, puis les évènements $E_1 = (M_2 = 1),\ E_2 = (M_2 = 2), E_3 = (M_2 = 3)$.

**(b)** Déterminer la fonction de répartition $F_{M_2}$ de $M_2$.

**2)** Soit $M_n = \max_{1 \leq i \leq n}\{X_i\}$ la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la plus grande valeur parmi $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Déterminer la fonction de répartition $F_{M_n}$ de $M_n$.

**3)** On lance un dé 2 fois, donc $n = 2$. Soient $X_1$ et $X_2$ les résutats respectifs de ces 2 lancers. Soit $m_2 = \min\{X_1, X_2\}$ la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la plus petite valeur parmi $X_1(\omega), X_2(\omega)$.

**(a)** Écrire $\Omega$, puis les évènements $E_1 = (m_2 = 1),\ E_2 = (m_2 = 2), E_3 = (m_2 = 3)$.

**(b)** Déterminer la fonction de répartition $F_{m_n}$ de $m_2$.

**4)** Soit $m_n = \min_{1 \leq i \leq n}\{X_i\}$ la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la plus petite valeur parmi $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Déterminer la fonction de répartition $F_{m_n}$ de $m_n$.

**5)** On suppose $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Déterminer les lois de $M_n$ et $m_n$.